

不連続格子を用いた 4 次精度差分法による波形合成  
3-D Fourth-Order Finite-Difference Seismograms Using Discontinuous Grids

青井 真<sup>1)</sup>、藤原 広行<sup>2)</sup>  
Shin AOI<sup>1)</sup> and Hiroyuki FUJIWARA<sup>2)</sup>

1) 科学技術庁防災科学技術研究所、研究員、博士(理学)

National Research Institute for Earth Science and Disaster Prevention, Researcher, Ph. D.

2) 科学技術庁防災科学技術研究所、主任研究官、博士(理学)

National Research Institute for Earth Science and Disaster Prevention, Senior Researcher, Ph. D.

#### 要約

大規模な平野において有限差分法による波形合成を行うさいに、地震波速度構造に合わせた不均質な格子を用いるのが非常に有効である。青井・藤原(1997)では食い違い格子による空間・時間2次精度の有限差分法に関して不連続な格子を用いた定式化を行い、十分な計算精度があることを確認した。今回我々は、空間4次・時間2次の有限差分法で同様の不連続格子を用いた場合について定式化を行った。4次精度の有限差分近似を用いることにより、2次精度の有限差分近似を用いるのに比べ格子間隔を 1.5-2 倍程度大きくすることが出来るため、3-8 分の1程度にメモリー量を節約することが出来る。本手法による合成波形は均質格子を用いた有限差分法によるものと17%以下の誤差で一致しており、十分な精度があるものと考えられる。

#### SUMMARY

We formulated and checked the accuracy of the finite-difference method (FDM) of second-order and fourth-order approximation for the time and spatial derivatives, respectively, with discontinuous grids where the number of grids is changed by eliminating or inserting them. Discontinuous grids were proved to have sufficient calculation accuracy concerning the second-order finite-difference operators for space and time (Aoi and Fujiwara, 1997). The use of these discontinuous grids in the FDM with the fourth-order operators for space enabled the application of this method to problems of larger scale.

#### 1. はじめに

地震波のシミュレーションを行うために、運動方程式を有限差分近似することにより数値的に解く手法は昔から用いられており(例えば、Boore (1972), Kelly *et al.* (1976))、現在では食い違い格子による定式化(例えば、Virieux (1984, 1986)、

Levander (1988)、Graves (1996))が一般的に用いられている。

電子計算機の性能の向上により、今やかなり現実的なモデルを用いて関東平野やロサンジェルスなどの大規模な平野における3次元波動場のシミュレーションを行うことが可能になりつつある(例えば、Sato(1997))。しかしながら、ごく表層部の

低速度の層に関しては波形に大きな影響をおよぼすにも関わらず、導入することが出来ないのが現状である。また、構造インバージョン(例えば Aoi *et al.* (1995, 1997))や震源インバージョンへの応用を考えると、計算機に対する負担の軽い波形合成法の開発が重要である。

均質な大きさの格子を用いる限り、格子サイズは計算すべき最低波長により決定されるため、低速度の層がごく表層のみ存在する場合でも計算領域全体を小さな格子に分割せざるを得ず、大規模な計算を行うのには自ずと限界がある。地震波形のシミュレーションを行う場合、地表に近いほど極端に地震波速度が遅い構造を取り扱うことが多いため、地震波速度構造に合わせた不均質な格子を用いる必要がある。このような不均質な格子を用いることにより、計算機に対する負荷を軽減する試みは2次元問題に関してはすでにいくつかの研究がなされている(例えば、Moczo(1989)、Pitarka(1994))。

不均質格子を用いることによる効果がより顕著である3次元問題に関して、青井・藤原(1997)、Aoi and Fujiwara (1998)では不連続格子による時間・空間2次精度の有限差分法の定式化が行われ、他の手法との比較により、不連続格子を用い

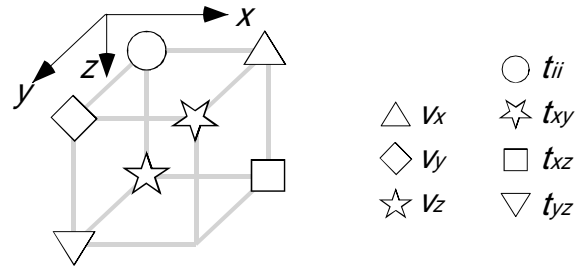


Fig. 1. A unit cell for staggered grids.

た方法に十分な精度があることが検証された。

現在、有限差分法による波形合成のさいには、格子間隔を1.5-2倍程度大きくすることが出来る、空間4次精度の有限差分近似を用いて計算するのが一般的である(例えば、Levander (1988))。このことにより、メモリー量を3ないし8分の1に、計算時間も大幅に軽減することが出来る。そこで今回我々は、不連続格子を用いた空間4次・時間2次精度の有限差分法の定式化を行う。

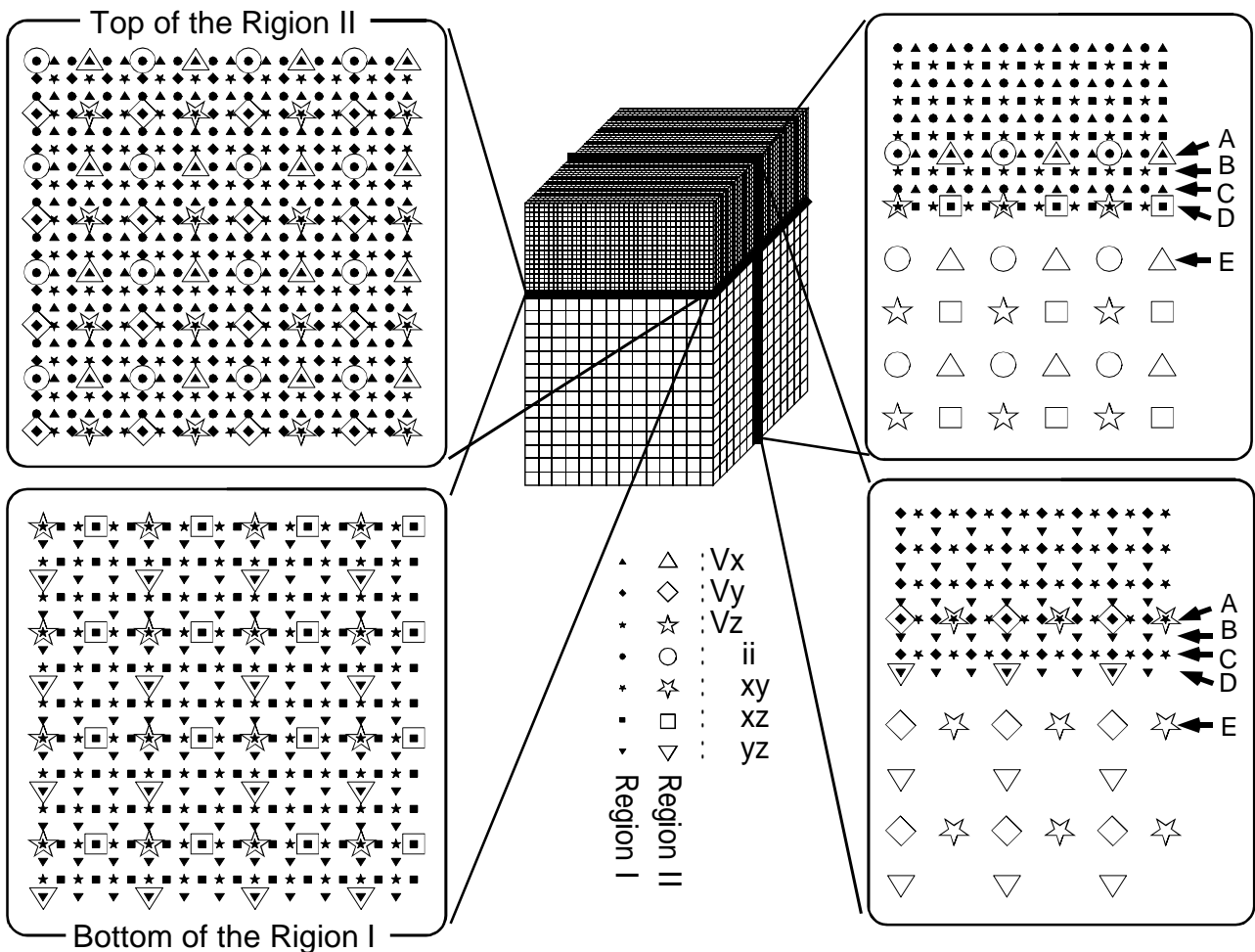


Fig. 2. (center)3-D discontinuous grid system. (left) Two transections on the top and at the bottom of the overlapping region of Regions I and II, where the elimination or the insertion of grids are necessary. (right) Two profiles of the discontinuous grids.

2. 手法

異なる格子点間隔を持つ二つの食い違い格子(格子点配列はそれぞれ Fig. 1 のとおり)から成る不連続格子(Fig. 2 中央)を用いる。領域 I は細かい格子点間隔(  $x, y, z$  方向の格子点間隔はそれぞれ  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  )を持つ領域、領域 II はその3倍の粗い格子点間隔(  $x, y, z$  方向の格子点間隔はそれぞれ  $3\Delta x, 3\Delta y, 3\Delta z$  )を持つ領域であり、2つの領域は  $3\Delta z / 2$  分の領域だけオーバーラップしている。領域 I と領域 II の内部における偏微分の項に対しては、4次精度の有限差分近似(例えば、Levander (1988))、

$$f_i = \frac{1}{h} \{ c_0(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) - c_1(f_{i+3/2} - f_{i-3/2}) \}$$

(ただし、 $c_0 = 9/8, c_1 = 1/24$  )、

を用いている(  $h$  は格子点間隔)。ただし、領域 I と領域 II の接続領域付近では、 $z$ に関する偏微分の項に対して4次精度の有限差分近似を用いることが出来ない。そこで、領域Iの  $B \cdot$

Table 1: Physical parameters of the structure

	Vp [km/s]	Vs [km/s]	Density [g/cm <sup>3</sup> ]	Thickness [km]
Sediment	2.4	0.8	1.8	1.0
Rock	4.3	2.5	2.5	

堆積層は直径 10km、深さ 1.0km の円柱  
(中心は  $x, y$  方向に - 50m, 0m シフトしている)

Table 2: Source parameters

震源位置	$x=-1.2$ [km]	$y=-1.2$ [km]	$Z=9.4$ [km]
時間関数	Ricker wavelet ( $fc = 0.8$ [Hz] )		
力の向き	single force ( $x$ -direction )		

C面内および領域 II の  $D \cdot E$  面内では(Fig. 2 右)、 $z$ に関する偏微分の項に対しては2次精度の有限差分近似(例えば、Virieux (1984))、

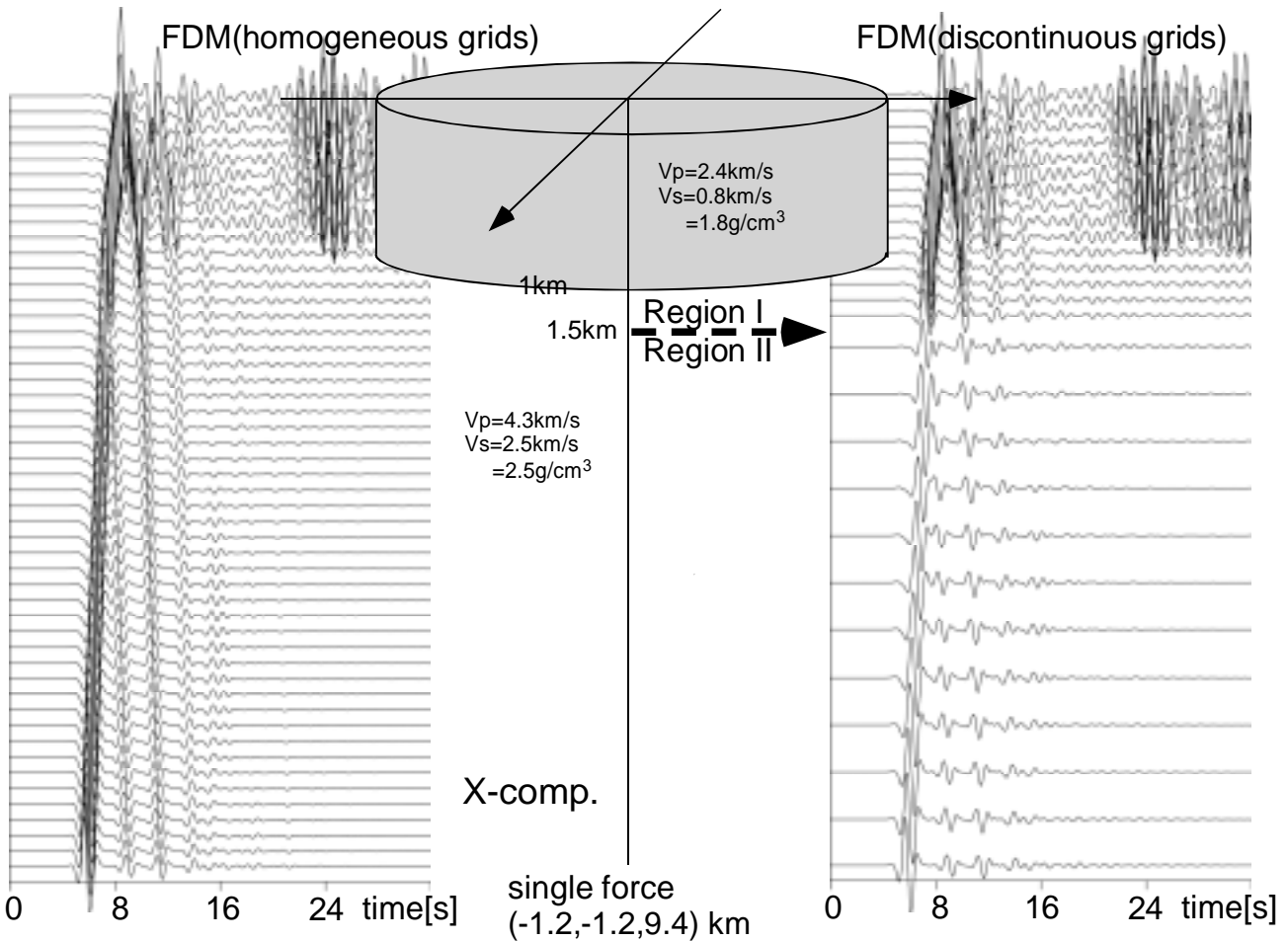


Fig. 3: Velocity waveform of x-component at the observation points on the  $z$ -axis (  $0 \text{ km} \leq z \leq 4.9 \text{ km}$  , with the interval of 100 m. This interval is 300 m in Region II) in 3-D basin structure, calculated (right) by the FDM using discontinuous grids and (left) by the FDM using uniform grids. On the center, the schematic of the structure employed is shown. The arrow indicates the boundary between the two regions.

$$f_i = \frac{1}{h} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2})$$

を用いる。また、4次精度の有限差分近似を用いる場合に一般的に行われるように、領域 I の上面、領域 II の底面および各領域の側面においても適宜2次精度の有限差分近似を用いる。

さらに、領域 I の D 面内および領域 II の A 面内では (Fig. 2 右)、2次精度の有限差分近似を用いても速度や応力を求めることは出来ない。これらの値は、他方の領域の値から内挿および間引くことにより求める。D 面内における領域 I の値は、領域 II における値から線形補間 (Appendix を参照) を用いて求めている。また、A 面内において領域 II の値を求めるべき格子点は全て領域 I の格子点であるため、領域 I の変数を間引くことによりその値をそのまま用いることが出来る。注目すべきことは、すべての変数の内挿および間引きはそれぞれ1つの水平面内でのみ行われており、その内挿以外は通常の有限差分近似により変数の更新が行われていることである。

計算領域の境界からの人工的な反射波を最小限に押さえるため、Cerjan *et al.* (1985) による吸収境界条件と、Clayton and Engquist (1977) による無反射境界条件を併用する。

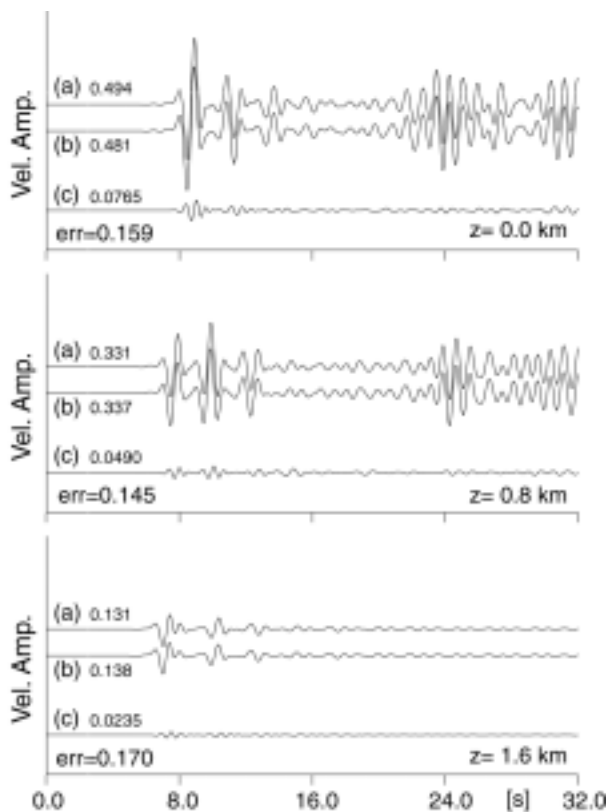


Fig. 4: The results of computation on z-axis at  $z = 0.0\text{km}$ ,  $0.8\text{km}$  and  $1.6\text{km}$  by (a) the FDM using discontinuous grids and (b) the FDM using uniform grids. The waveforms in the lower part of the figure show the difference between them.

### 3. 計算例

本手法の精度を検証するために、簡単な3次元盆地モデルを用いて、不連続格子による計算結果を、通常の均質格子を用いた有限差分法による計算結果と比較する。

ここで用いるモデルは、直径  $20\text{km}$ ・深さ  $1.0\text{km}$  の円柱状の堆積層と岩からなる盆地モデルであり (Fig. 3 中央)、それぞれの媒質は Table 1 に示す物理常数を持つ均質完全弾性体である。震源は  $x$  方向へのシングルフォース ( $x = -1.2\text{ km}$ ,  $y = -1.2\text{ km}$ ,  $z = 9.4\text{ km}$ )、震源時間関数は中心周波数  $0.8\text{Hz}$  の Ricker wavelet である (Table 2)。中心周波数  $0.8\text{Hz}$  の Ricker wavelet はおおむね  $1.6\text{Hz}$  の周波数帯までパワーを持っており、計算領域における最短波長は  $600\text{m}$  程度であることから、1波長あたり 6 格子点である。Fig. 3 に本手法 (右) および均質な格子を用いた空間4次精度の有限差分法 (左) による計算結果を示した。観測点は原点から深さ方向に  $100\text{m}$  間隔で 40 点 (ただし、不連続格子の領域 II にあっては  $300\text{m}$ ) である。

Fig. 3 の結果から、両手法でほぼ合成波形が一致していることが分かり、また、領域 I と領域 II の接続部分を通過することで波形が乱れていないことから、変数の内挿の精度は十分であることが分かる。領域 I と領域 II を接続している部分における領域 II の格子点数は、 $1.6\text{Hz}$  の S 波の場合 1波長あたり 6 格子点程度、Ricker wavelet の中心周波数  $0.8\text{Hz}$  の場合 1波長あたり 12 格子点程度である。Aoi and Fujiwara (1998) において、1波長あたりの格子点数と線形内挿の精度に関して考察がなされている。

さらに詳しく誤差を評価するために、

$$\text{誤差} = \frac{\text{両手法の結果の差の RMS}}{\text{均質格子による結果の RMS}}$$

を用いて、3つの深さにおける両手法の波形を比較する (Fig. 4)。全ての観測点において、誤差が 17% 以下におさまっており、不連続格子による合成波形は非常に精度よく計算出来ることが分かる。

ここで示した例の場合、不連続格子を用いて計算することにより、メモリー量および計算時間を 4.5 分の1程度に軽減することに成功した。さらに大規模な計算においては、十分の程度まで計算機に対する負荷を軽減することが出来る。このことはメモリー量を増やすことなく格子サイズを半分以下に出来ることを意味する。

### 4. まとめ

現実的なモデルを用いた有限差分法による3次元波形シミュレーションを行う上で最も大きな問題は、計算時間およびメモリー要求量であるが、地震波速度構造に合わせた不均質な格子と空間4次精度の有限差分法を組み合わせることにより、より大規模な地震波シミュレーションを行うことの出来る手法を

提案した。

細かい格子とその3倍の格子点間隔を持つ粗い格子の二つから成る不連続格子を用い、内挿や間引きにより2つの領域を接続する手法は空間4次精度の有限差分法においても有効であることを示した。通常の均質格子を用いた場合との残差で誤差を評価すると、不連続格子を用いることによる誤差は17%以下となり、十分な計算精度があることが分かった。4次精度の有限差分法を用いることにより、2次精度の場合に比べ格子間隔を1.5-2倍程度大きくすることが出来るため、メモリー量を3ないし8分の1程度に、計算時間も大幅に軽減することが出来る。また、不連続格子を用いることによりメモリー量および計算時間を数分の1から十分の1程度に軽減することに成功したが、このことはメモリー量を増やすことなく格子サイズを半分以下に出来ることを意味する。

#### 謝辞:

Geophysical Institute Slovak Academy of Sciences の Peter Moczo 博士には有益な議論をしていただきました。計算に科学技術庁防災科学技術研究所のスーパーコンピュータを使用させていただきました。記して感謝いたします。

#### 参考文献

- 青井・藤原 (1997)、不連続格子による3次元差分法を用いた波形合成(その1)、日本地震学会 1997 年度秋季大会予稿集、C41
- Aoi, S., T. Iwata, K. Irikura, and F. J. Sanchez-Sesma (1995). Waveform inversion for determining the boundary shape of the basin structure, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 1445-1455
- Aoi, S., T. Iwata, H. Fujiwara and K. Irikura (1997). Boundary shape waveform inversion for two-dimensional basin structure using three-component array data with obliquely azimuthal plane incident wave, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, 222-233
- Aoi, S. and H. Fujiwara (1998). 3-D finite-difference method using discontinuous grids, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 投稿中
- Boore, D. M. (1972). Finite-difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials, in *Methods in Computational Physics*, Vol.11, B. A. Bolt (Editor), Academic Press, New York.
- Cerjan, C., D. Kosloff, R. Kosloff, and M. Reshef (1985). A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, *Geophysics* **50**,

705-708.

- Clayton, R. and B. Engquist, (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bull. Seism. Soc. Am.* **67**, 1529-1540.
- Graves, R. W. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite difference, *Bull. Seism. Soc. Am.* **86**, 1091-1106.
- Kelly, K. R., R. W. Ward, S. Treitel, and R. M. Alford (1976). Synthetic seismograms a finite-difference approach, *Geophysics* **41**, 2-27.
- Levandar, A. R. (1988). Fourth-order finite-difference P-SV seismograms, *Geophysics* **53**, 1425-1436.
- Moczo, P. (1989). Finite-difference technique for SH-waves in 2-D media using irregular grids application to the seismic response problem, *Geophys. J. Int.* **99**, 321-329.
- Pitarka, A. (1994). SH wave propagation in anelastic and heterogeneous media using 2D Finite difference method with irregular grid, 日本地震学会講演予稿集, 1994 年秋季大会
- Sato, T., R. W. Graves and P. G. Somerville (1997). Preliminary analysis of long-period basin response in the Tokyo metropolitan area from 1990 Odawara earthquake (M5.1) using 3D finite difference method, 地球惑星科学関連学会 1997 年合同大会予稿集、103、B41-10
- Virieux, J. (1984). SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method, *Geophysics* **49**, 1933-1957.
- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method, *Geophysics* **51**, 889-901.

#### Appendix

領域 I と領域 II の接続部で必要となる内挿法を具体的に述べる。Fig. A-1 に示すように、

$$\begin{aligned} a^0(x) &= 1-x \\ a^1(x) &= x \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

で与えられる内挿関数を用いて線形の内挿を行う。これらの内挿関数を用いて、1/3 間隔で内挿するための重みを Table A-1 に示す。

領域 I の最下面(本文 Fig. 2 の D 面内)において、各変数は x-y 平面上で内挿を行う必要がある(本文 Fig. 2 左下)。内挿が必要となる各変数の格子点は Fig. A-2 のような配置となっている。図中の (I,J)、(i,j) は内挿を行うための局所的

**C 4 - 4**

な番号付けであり、内挿によって得られる値は

$$u_{ij} = \sum_{I=0}^1 \sum_{J=0}^1 \alpha_{i,j}^{I,J} U^{I,J} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3; I, J = 0, 1)$$

$$\alpha_{i,j}^{I,J} = a_i^I \cdot a_j^J$$

となる。ただし、 $U^{I,J}$ 、 $u_{i,j}$  はそれぞれ領域 I、領域 II の速度または応力を表す。

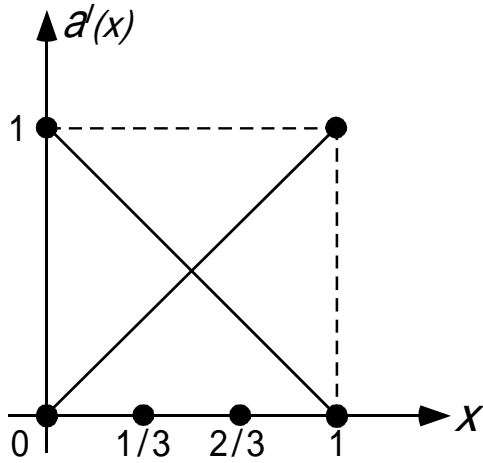


Fig. A-1: Interpolation functions for linear interpolation.

Table A-1: Weights for linear interpolation

$l$	0	1	2	3
	$x_i$	0	1/3	2/3
$a_i^0 = 1 - x_i$	1	2/3	1/3	0
$a_i^1 = x_i$	0	1/3	2/3	1

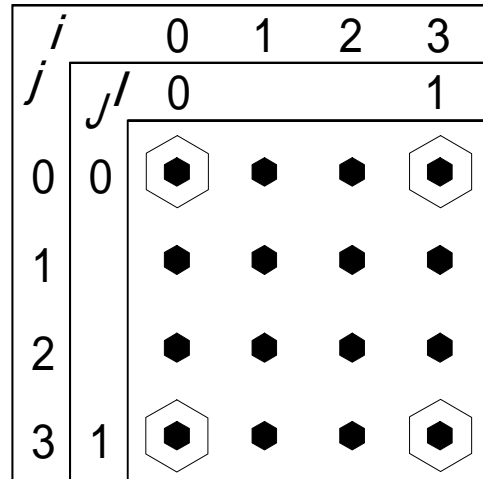


Fig. A-2: Grid locations on the plane for interpolation, where (I, J) and (i, j) are local numberings for the interpolation.